

Dr.-Ing. Joachim Kretz

# Stabilität und Theorie II. Ordnung von Stäben und Stabtragwerken

## Berechnungsgrundlagen zu druckbeanspruchten schlanken Stabtragwerken im Stahlbau

Druckbeanspruchte schlanke Bauteile sind stabilitätsgefährdet. Deren Versagen kündigt sich nicht wie bei gedungenen Bauteilen durch stetig anwachsende Verformungen an, sondern es tritt eine starke Zunahme der Verformung bei geringer Laststeigerung auf. Das Versagen erfolgt plötzlich. Die Stabilitätsfälle stabförmiger Bauteile Biegeknicken und Biegedrillknicken sind deshalb von zentraler Bedeutung (nicht nur) im Stahlbau. Aus Sicherheits- und Wirtschaftlichkeitsgründen müssen alle Tragwerksplaner diese Stabilitätsfälle beherrschen und die geeigneten Nachweisverfahren kennen.

Ziel dieses Artikels ist es, das Tragverhalten druckbeanspruchter Bauteile zu erläutern und den Zusammenhang mit den theoretischen Grundlagen der Tragsicherheitsnachweise herzustellen. Die Nachweisgleichungen zu den Biegeknick- und Biegedrillknicknachweisen sind in der Norm enthalten und mit allen Parametern ausführlich beschrieben. Auf eine ausführliche Erläuterung der Nachweisgleichungen wird deshalb hier verzichtet.



Bauwerke bestehen aus verschiedenen Bauteilen, die im Wesentlichen stab- oder plattenförmig orientiert sind. Einzelbauteile werden in vielen Fällen zu Teilstrukturen zusammengefügt (Rahmensysteme, Stützenstränge, ...), die wiederum zum Gesamtbauwerk zusammengesetzt werden. Die statische Bearbeitung komplexer Systeme besteht häufig darin, das Gesamtsystem in Teilsysteme zu zerlegen und

diese separat zu analysieren. Die Zusammenhänge mit dem Gesamtsystem sind bei diesem Vorgehen durch geeignete, realitätsnahe Randbedingungen für die Teilsysteme zu berücksichtigen, die die Konstruktion hinreichend sicher erfassen. Für eine sichere Bemessung insbesondere druckbeanspruchter Bauteile ist eine gründliche Untersuchung der möglichen Versagensformen unumgänglich.

# 1 Einführung

## Verzweigungsproblem

Die klassische Stabilitätstheorie betrachtet den rein theoretischen Fall eines ideal geraden Stabes mit exakt mittiger Druckkrafteinleitung (Verzweigungsfall).

Unter Druckbeanspruchung wird der Stab gestaucht, bleibt aber bis zum Erreichen der Verzweigungslast  $N_{Ki}$  im stabilen Gleichgewicht. Bei  $N = N_{Ki}$  tritt ein indifferentes Gleichgewicht auf, bei dem keine eindeutige Gleichgewichtslage zu bestimmen ist (Bild 1). In diesem Zustand kann der Stab entweder gerade bleiben oder ausknicken; der Verschiebungszustand ist also mehrdeutig. Dies entspricht der genauen Definition eines Stabilitätsproblems.

„Ein Stabilitätsproblem liegt dann vor, wenn zu einem bestimmten Wert der Belastung mehr als ein Verschiebungszustand möglich ist“ [3].

## Spannungsproblem

In der Realität treten jedoch keine exakt geraden Stäbe auf. Schon infolge unvermeidbarer Imperfektionen ergeben sich Zusatzmomente, die beim Gleichgewicht berücksichtigt werden müssen.

Bei einer Normalkraftsteigerung führen diese Zusatzbeanspruchungen zu einer Grenzlast, ohne dass eine Gleichgewichtsverzweigung auftritt. Das zugehörige nichtlineare Last-Verformungsverhalten ist Bild 1 zu entnehmen (Theorie II. Ordnung).

Setzt man unbegrenzt elastisches Tragverhalten und kleine Imperfektionen voraus, so nähert sich die Last-Verformungskurve asymptotisch der horizontalen Geraden durch  $N_{Ki}$ .

## Traglastproblem

Als weiteres Versagensproblem ist die Traglast zu nennen. Die maximale Normalkraft ( $max N$ ) wird erreicht, wenn infolge des nichtlinearen Werkstoffverhaltens (linearelastisch) ein Fließgelenk (in Feldmitte) infolge der Beanspruchungen aus  $N$  und  $M$  (Normalkraft x Exzentrizität) entsteht.

Insgesamt sind also drei mögliche „Stabilitätsprobleme“ zu unterscheiden, die in Bild 1 dargestellt sind:

- Verzweigungsproblem
- Spannungsproblem
- Traglastproblem

Prof. Dr.-Ing. R. Kindmann hat sich in vielen Veröffentlichungen u. a. den Themen Stabilität und Theorie II. Ordnung gewidmet. An einigen Stellen dieses Artikels werden bewusst Beispiele aus dieser Literatur [5, 7] verwendet, damit diese in der Originalliteratur weiter vertieft werden können.

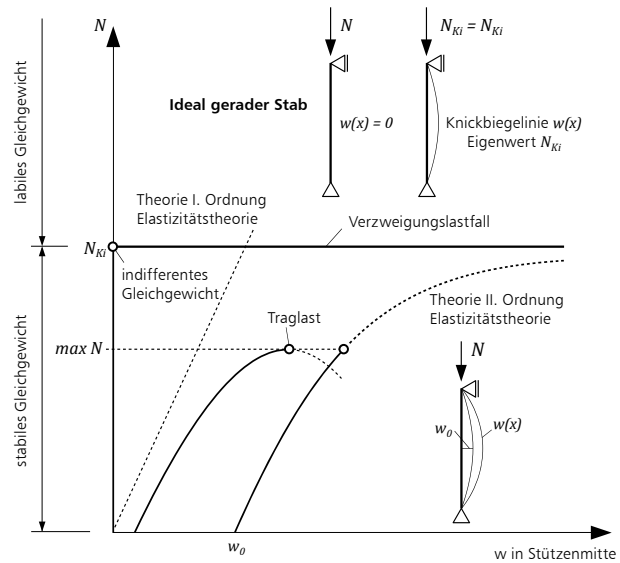


Bild 1. Stabilität und Tragfähigkeit eines Druckstabes

# 2 Tragfähigkeitsnachweise

## 2.1 Nachweisverfahren

Nach DIN 18800-2 [1] ist eine ausreichende Tragsicherheit wahlweise nach einem der in Tabelle 1 angegebenen Verfahren nachzuweisen.

	Nachweisverfahren	Berechnung der	
		Schnittgrößen infolge der Einwirkungen	Beanspruchbarkeiten
nach			
1	Elastisch-Elastisch	Elastizitätstheorie	Elastizitätstheorie
2	Elastisch-Plastisch	Elastizitätstheorie	Plastizitätstheorie
3	Plastisch-Plastisch	Fließgelenktheorie	Plastizitätstheorie

Tabelle 1. Mögliche Nachweisverfahren nach DIN 18800-2 [1]

Beim Verfahren **Elastisch-Elastisch** werden die Schnittgrößen nach der Elastizitätstheorie berechnet, daraus mit den Querschnittswerten Spannungen ermittelt und anschließend die Spannungsnachweise geführt. Bei diesem Nachweisverfahren wird ein linearelastisches Werkstoffgesetz unterstellt. Die Beanspruchbarkeit ist durch das Erreichen der Streckgrenze in der am ungünstigsten beanspruchten Faser (Stelle) begrenzt.

Die Schnittgrößenermittlung erfolgt auch beim Verfahren **Elastisch-Plastisch** nach der Elastizitätstheorie. Die Beanspruchbarkeit wird durch die plastische Querschnittstragfähigkeit unter Berücksichtigung der Interaktionsbedingungen bestimmt. Dieses Verfahren nutzt die plastischen Reserven des Querschnitts, aber nicht die des Systems.

Das Nachweisverfahren **Plastisch-Plastisch** erfordert einen sehr hohen Rechenaufwand, liefert aber mit der Fließzonentheorie die genauesten Ergebnisse. Dieses Verfahren nutzt sowohl die plastischen Reserven des Querschnitts als auch die des Systems.

### 2.2 Stabilitätsfälle

Als Versagensfälle des gedrückten Stabes werden Biegeknicken und Biegedrillknicken unterschieden (Bild 2).

Das Stabilitätsproblem **Biegeknicken** ist durch reine Verschiebungszustände gekennzeichnet, wobei die Verschiebungen in y- oder z-Richtung auftreten können. Beim Stabilitätsproblem **Biegedrillknicken** tritt zusätzlich zu einem Verschiebungszustand noch eine Querschnittsverdrehung  $\vartheta$  auf. Nach DIN 18800-2 [1] dürfen zur Vereinfachung Biegeknicken und Biegedrillknicken getrennt untersucht werden. Dabei ist nach dem Nachweis des Biegeknickens der Biegedrillknicknachweis für die aus dem Gesamtsystem herausgelöst gedachten Einzelstäbe zu führen.

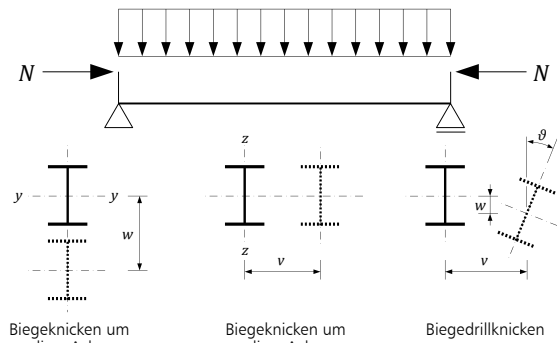


Bild 2. Versagensfälle des gedrückten Stabes

Damit ein Stabilitätsversagen in Form von Biegeknicken bzw. Biegedrillknicken nicht auftritt, muss die vorhandene Druckkraft kleiner als die kritische Normalkraft  $N_{Ki}$  sein.  $N_{Ki}$  ist damit eine obere Schranke für  $N$ .

### 2.3 Methoden für den Nachweis ausreichender Tragsicherheit

Der Nachweis einer ausreichenden Tragsicherheit beim Biegeknicken und Biegedrillknicken kann auf verschiedene Arten erbracht werden. Neben dem Allgemeinen Verfahren, bei dem das komplexe räumliche Stabilitätsversagen am Gesamtsystem unter Berücksichtigung von geometrischen und strukturellen Imperfektionen und unter Berücksichtigung von geometrisch und physikalisch nichtlinearen Materialgesetzen nachgewiesen wird (für die tägliche Praxis nicht geeignet), stehen weitere, alternative Methoden zur Verfügung (Tabelle 2).

Methodik	Biegeknicken	Biegedrillknicken
<b>Nachweise mit Abminderungsfaktoren</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Beanspruchungen für die Nachweise</li> <li>• Verzweigungslasten (Eigenwerte)</li> <li>• bezogene Schlankheitsgrade</li> <li>• Abminderungsfaktoren</li> </ul>	Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung $N_{Ki,y} ; N_{Ki,z}$ $\bar{\lambda}_K$ $\kappa$	$M_{Ki,y} ; N_{Ki}$ $\bar{\lambda}_M$ $\kappa_M$
<b>Ersatzimperfektionsverfahren</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• geometrische Ersatzimperfektionen</li> <li>• Beanspruchungen für die Nachweise</li> <li>• Nachweise</li> </ul>	$w_0$ oder $v_0$ Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung Spannungsnachweise oder Nachweise unter Ausnutzung plastischer Tragfähigkeiten	$v_0$
<b>Fließzonentheorie</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Imperfektionen</li> <li>• Beanspruchungen für die Nachweise</li> <li>• Nachweise</li> <li>• Hinweis</li> </ul>	Geometrische Imperfektionen und Eigenspannungen Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung von Fließzonen Ausnutzung des plastischen Werkstoffverhaltens bedingt praxistauglich!	

Tabelle 2. Alternative Methoden zum Nachweis ausreichender Tragsicherheit bei Biegeknicken und Biegedrillknicken nach [5]

#### Nachweis mit Abminderungsfaktoren

Diese Nachweismethode entspricht dem in DIN 18800-2 [1] angegebenen Ersatzstabverfahren. Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, den eigentlichen Nachweis an einem aus dem Tragwerk gedanklich herausgeschnittenen Stab zu führen. Dieser Stab wird als Ersatzstab für das tatsächlich vorliegende System angesehen. Die Nachweise werden mit Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung geführt, da der Einfluss der Verformungen des untersuchten Stabes auf die Schnittgrößen bereits in den Abminderungsfaktoren (Beiwerten) der Interaktionsgleichungen berücksichtigt wird. Die Abminderungsfaktoren sind bei dieser Methode aus dem Vergleich von Rechenergebnissen nach der Fließzonentheorie mit den Ergebnissen nach den Ersatzstabverfahren bestimmt worden. Somit sind alle die der Traglastberechnung nach der Fließzonentheorie zugrundeliegenden Einflüsse in den Abminderungsfaktoren der Ersatzstabverfahren berücksichtigt. Für den Nachweis benötigt man den Eigenwert der Verzweigungslast  $N_{Ki}$  bzw. den Eigenwert des Verzweigungsmomentes  $M_{Ki}$ . Ist  $N_{Ki}$  als Eigenwert bestimmt, so wird der bezogene Schlankheitsgrad  $\bar{\lambda}_K$  berechnet, der zur Ermittlung des Abminderungsfaktors  $\kappa$  dient, mit dem der Nachweis  $N \leq \kappa \cdot N_{pl,d}$  geführt werden kann. Die Nachweise sind dem Nachweisverfahren Elastisch-Plastisch zuzuordnen.

#### Nachweis mit dem Ersatzimperfektionsverfahren

Wird der Nachweis nach der Theorie II. Ordnung geführt, ist es erforderlich, Imperfektionen realitätsnah zu berücksichtigen. Die in der Realität vorkommenden Imperfektionen kann man in strukturelle Imperfektionen (Streuung der Materialeigenschaften wie E-Modul und Streckgrenze, Eigenspannungen) und geometrische Imperfektionen (Vorkrümmung, Schiefstellung) unterteilen (Bild 3). Diese Imperfektionen führen bei einem ungünstigen Ansatz zu einer deutlichen Abnahme der Traglast. Zur Vereinfachung des Tragsicherheitsnachweises werden die tatsächlichen, völlig unregelmäßig auftretenden Abweichungen vom Berechnungsmodell in Form von geometrischen Ersatzimperfektionen berücksichtigt.

Der Ansatz der Ersatzimperfektionen muss so erfolgen, dass die ungünstigste Wirkung auf die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung sichergestellt ist. Eine zur ersten Knickeigenform affine geometrische Ersatzimperfektion führt bei einer

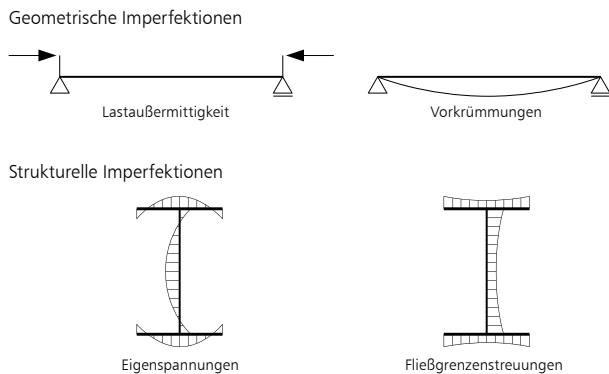


Bild 3. Geometrische und strukturelle Imperfektionen nach [2]

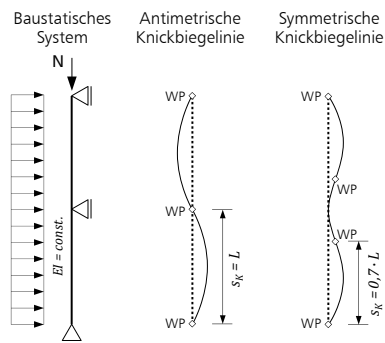


Bild 4. Durchlaufsystem mit möglichen Knickbiegelineien nach [5]

Berechnung von Tragwerken mit überwiegender Normalkraftbeanspruchung (z.B. Stützen) nach Theorie II. Ordnung zu den maßgebenden kleinsten Traglasten (Bild 4). Ein richtiger Ansatz der geometrischen Ersatzimperfektionen ist nur möglich, wenn man die Knickbiegelineie kennt.

Sind außer der Druckkraft auch große Querbelastungen (z.B. bei Durchlaufträgern) vorhanden, so kann die ungünstigste Imperfektionsanordnung auch infolge eines symmetrischen Ansatzes zu den kleinsten Traglasten führen (Bild 4).

Die Größe des anzusetzenden Stiches der Vorkrümmung von Einzelbauteilen ist nach DIN 18800-2 [1] entsprechend Tabelle 3 in Abhängigkeit von der Zuordnung der Profile zu den Knickspannungslinien anzusetzen. Da beim Nachweisverfahren Elastisch-Elastisch die plastische Querschnittstragfähigkeit nicht ausgenutzt wird, dürfen die Ersatzimperfektionen für Vollstäbe auf 2/3 der Werte nach Element (202) reduziert werden.

Knickspannungslinie von einteiligen Stäben	Elastische Berechnung	Plastische Berechnung
a <sub>0</sub>	L/525	L/350
a	L/450	L/300
b	L/375	L/250
c	L/300	L/200
d	L/225	L/150

Tabelle 3. Stich der Vorkrümmung

Vorverdrehungen sind bei Stäben anzunehmen, die am verformten Stabwerk Stabdrehwinkel aufweisen können (z.B. Kragstützen) und durch Normalkräfte beansprucht sind. Die Größe der Vorverdrehung beträgt für einteilige Stäbe

$$\varphi_0 = \frac{1}{200} \cdot r_1 \cdot r_2$$

(siehe hierzu Abs. 2.3 der DIN 18800-2 [1]).

### Fließzonentheorie

Das tatsächliche Tragverhalten kann mit Hilfe der Fließzonentheorie am besten abgebildet werden. Diese Nachweisführung ist aber nur mit entsprechend leistungsfähiger EDV möglich. Die Anwendung ist z. Z. für die praktische Projektbearbeitung noch nicht geeignet.

## 3 Stabilitätsproblem Biegeknicken

### 3.1 Drucknormalkräfte $N_{Ki}$ , Knicklängen $s_K$ und Knickbiegelineien

Bei Anwendung des Ersatzstabverfahrens wird der Trag sicherheitsnachweis an einem aus dem Tragwerk gedanklich herausgeschnittenen Stab (siehe auch Abschnitt 2.3) geführt. Für diesen Ersatzstab wird die Knicklänge  $s_K$  und damit die Knicklast  $N_{Ki}$  benötigt. Diese Werte sind der Ausgangspunkt zur Ermittlung des bezogenen Schlankheitsgrades  $\bar{\lambda}_K$  und damit für die Berechnung des Abminderungsfaktors  $\kappa$  (siehe dazu auch Bilder 7 und 8).

Die Anfälligkeit eines Systems oder Bauteils bezüglich eines möglichen Stabilitätsversagens wird mit dem Begriff des Schlankheitsgrades  $\lambda$  bzw.  $\lambda_K$  charakterisiert. Dieser ermittelt sich als Quotient aus der Knicklänge  $s_K$  und dem „kleinsten“ Trägheitsradius  $i$  des Druckstabes zu  $\lambda_K = s_K/i$ .

Allgemein wird jedoch nicht der Schlankheitsgrad  $\lambda_K$ , sondern der bezogene Schlankheitsgrad  $\bar{\lambda}_K$  verwendet. Dieser bestimmt sich mit der plastischen Normalkraft  $N_{pl}$  und der kleinsten Verzweigungslast  $N_{Ki}$  zu:

$$\bar{\lambda}_K = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{Ki}}}$$

Der Vorteil einer Darstellung als bezogener Schlankheitsgrad  $\bar{\lambda}_K$  liegt in der direkten Vergleichbarkeit von Systemen aus verschiedenen Materialien, Querschnitten und Längen. Zusätzlich besteht ein Vorteil in der Möglichkeit, allgemeine Grenzschlankheitsgrade zu definieren, bei denen kein Stabilitätsversagen mehr auftreten kann.

Zur Ermittlung der Knicklängen  $s_K$  und der Knicklast  $N_{Ki}$  sind die Knickbiegelineien bei komplexeren Stabsystemen (federnde Lagerung, Steifigkeitsänderungen,...) unverzichtbar. Da die Ersatzimperfektionen beim Tragsicherheitsnachweis nach Theorie II. Ordnung ungünstigst angesetzt werden müssen, ist eine korrekte Anordnung nur bei Kenntnis der Knickbiegelineie möglich.



# EuroSta 2011

## Stabtragwerke

Beton- und  
Stahlbetonbau

Grundbau

Holzbau

Stahlbau

Mauerwerks-  
bau

Verbundbau

Glasbau

EuroSta dient der Berechnung und Bemessung von ebenen und räumlichen Stabtragwerken. Es bietet eine effektive, grafische Bearbeitung der Tragstruktur durch Integration von Eingabe / Statik / Nachweise / Bemessung einschließlich Systemknickstabilität, Eigenschwingungen und Numerik/Kinematik-Tests bis hin zur Anschlussbemessung.

### EuroSta.holz 2011

Berechnung und Bemessung von ebenen und räumlichen Stabwerken aus Holz nach DIN 1052 (12/08)

- EuroSta.holz compact 2011** **790,- EUR**  
EuroSta.holz-Paket für ebene Stabwerke M600
- EuroSta.holz classic 2011** **1.490,- EUR**  
EuroSta.holz-Paket für ebene und räumliche Stabwerke M600, M601, M651
- EuroSta.holz comfort 2011** **1.990,- EUR**  
EuroSta.holz-Paket für ebene und räumliche Stabwerke mit dynamischer Untersuchung M600, M601, M610, M611, M614, M615, M651

### EuroSta.stahl 2011

Berechnung und Bemessung von ebenen und räumlichen Stabwerken aus Stahl nach DIN 18800 (11/08)

- EuroSta.stahl compact 2011** **790,- EUR**  
EuroSta.stahl-Paket für ebene Stabwerke M700
- EuroSta.stahl classic 2011** **1.490,- EUR**  
EuroSta.stahl-Paket für ebene und räumliche Stabwerke M700, M701, M720
- EuroSta.stahl comfort 2011** **1.990,- EUR**  
EuroSta.stahl-Paket für ebene und räumliche Stabwerke mit dynamischer Untersuchung M700, M701, M710, M711, M714, M715, M719, M720

Es gelten unsere Allgemeinen Geschäftsbedingungen. Änderungen und Irrtümer vorbehalten.  
Betriebssysteme Windows XP (32) / Windows Vista (32/64) / Windows 7 (32/64) – Alle Preise zzgl. Versandkosten (7,50 EUR) und ges. MwSt.  
Hardlock für Einzelplatzlizenz, je Arbeitsplatz erforderlich (95,- EUR). Handbücher auf DVD. – Stand: Juni 2011

Antwort an mb AEC Software GmbH, Europaallee 14, 67657 Kaiserslautern  
Telefon: 0631 30333-11, E-Mail: info@mbaec.de, Internet: www.mbaec.de

# FAX: 0631 30333-20



Absender:

Bitte Zutreffendes ankreuzen

**Bestellung**

Hardlock-Nr. (falls vorhanden): \_\_\_\_\_

**Ich wünsche eine persönliche Beratung und bitte um Rückruf**

**Ich bitte um Zusendung von Informationsmaterial**

Firma \_\_\_\_\_ Kunden-Nr. (falls vorhanden) \_\_\_\_\_

Vorname, Name \_\_\_\_\_

Straße, Hausnummer (ggf. App.-Nr., etc.) \_\_\_\_\_

PLZ/Ort \_\_\_\_\_

Telefon/Fax \_\_\_\_\_

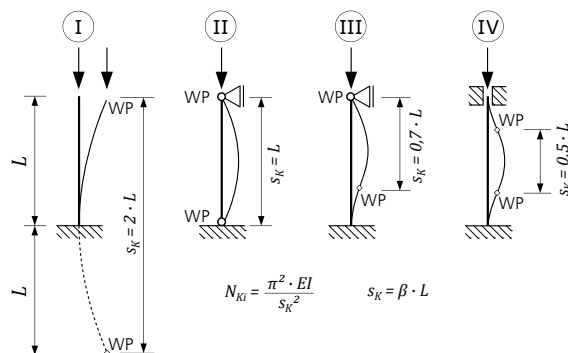
E-Mail \_\_\_\_\_





Eulerfall	I	II	III	IV
Knickbedingungen	$\cos \varepsilon = 0$	$\sin \varepsilon = 0$	$\varepsilon \cdot \cos \varepsilon = \sin \varepsilon$	$\cos \varepsilon = 1$
1. Eigenwert $\varepsilon_{Ki}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{0,699}$	$\frac{\pi}{0,5}$
Ideale Drucknormalkraft $N_{Ki}$ (Verzweigungslast)	$\frac{\pi^2 \cdot EI}{(2 \cdot L)^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot EI}{(0,699 \cdot L)^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot EI}{(0,5 \cdot L)^2}$
Knicklänge $s_K$	$2 \cdot L$	$L$	$\sim 0,7 \cdot L$	$\sim 0,5 \cdot L$
Knicklängenbeiwert $\beta$ $\beta = \frac{s_K}{L} = \frac{\pi}{\varepsilon_{Ki}}$	2	1	$\sim 0,7$	0,5

Tabelle 4. Kleinste Eigenwerte und Knicklängen der Eulerfälle nach [5]



Die Knickbiegelines werden i. A. mit der Methode der Finiten Elemente als Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt. Die Eigenwerte eines Systems sind ein Maß für die Stabilitätsgefahr des baustatischen Systems.

Bei Stäben mit konstanter Druckkraft und gleich bleibendem Querschnitt ist die Knicklänge  $s_K$  gleich dem Abstand der Wendepunkte und damit gleich dem Abstand benachbarter Momentennullpunkte [5].

### 3.2 Eulerfälle

Die Eigenwerte der vier Eulerfälle sind allgemein bekannt und damit auch deren Knicklänge.

Die kleinsten Eigenwerte der Eulerfälle I bis IV sind in Tabelle 4 angegeben. Sie dienen in vielen Fälle als Referenz für abgeleitete statische Tragsysteme.

### 3.3 Verzweigungslastfaktor $\eta_{Ki}$

Ist die Normalkraftverteilung über die Stab- bzw. Systemlänge nicht konstant, gibt der **Verzweigungslastfaktor  $\eta_{Ki}$**  an, um welchen Faktor die Last an der Stelle (x) gesteigert werden kann, damit gerade  $N_{Ki}$  erreicht wird. Für zwei Stäbe mit nicht konstantem  $N$ -Verlauf über die Stablänge ist der Zusammenhang in Bild 5 beispielhaft dargestellt.

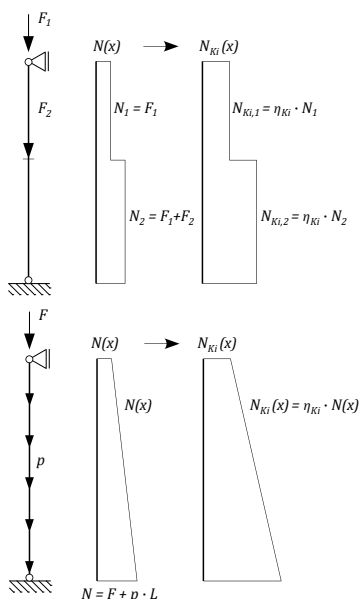


Bild 5. Druckstäbe mit veränderlichen Normalkräften nach [5]

Der Laststeigerungsfaktor  $\eta_{Ki}$  ist abhängig von:

- Normalkraftverteilung
- Steifigkeitsverteilung  $EI$
- Abmessungen der Stäbe
- Randbedingungen

### 3.4 Ersatz von Tragwerksteilen durch Federn

Nicht nur starr gelagerte Stabsysteme können bezüglich des Stabilitätsproblems Biegeknicken analysiert und deren Knickbiegeline ermittelt werden, sondern auch federnd gelagerte Systeme. Die federnden Lagerungsbedingungen können sowohl am Stabanfang bzw. Stabende sowie an beliebiger Stelle im System angeordnet sein.

Bild 6 zeigt den Einfluss einer in Feldmitte angeordneten Wegfeder bei einem Druckstab. Zu erkennen ist, dass die Knicklänge mit Zunahme der Federsteifigkeit reduziert und die kritische Druckkraft erhöht wird. Bild 6 zeigt aber auch, dass ab einer bestimmten Mindestfedersteifigkeit  $C_w$  die kritische Last  $N_{Ki}$  nicht mehr gesteigert werden kann.

Aus den angeführten Beispielen wird die Bedeutung der Knickbiegeline deutlich. Für komplexere Stabsysteme ist die Ermittlung der Knickbiegeline unverzichtbar für den korrekten Nachweis des Stabilitätsproblems Biegeknicken.

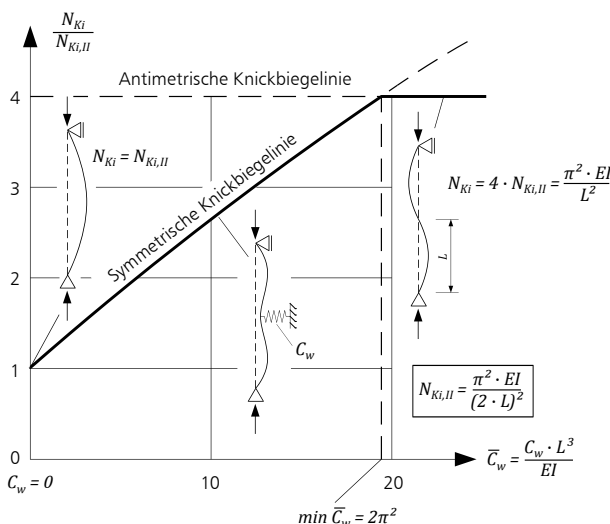


Bild 6. Mindeststeifigkeit für antisymmetrisches Biegeknicken nach [5]

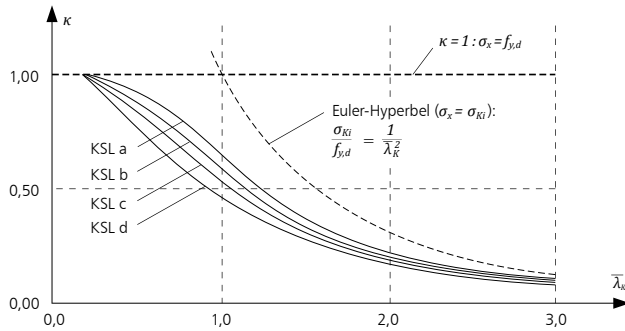


Bild 7. Knickspannungslinien a, b, c und d für das Biegeknicken bei Druckstäben nach [5]

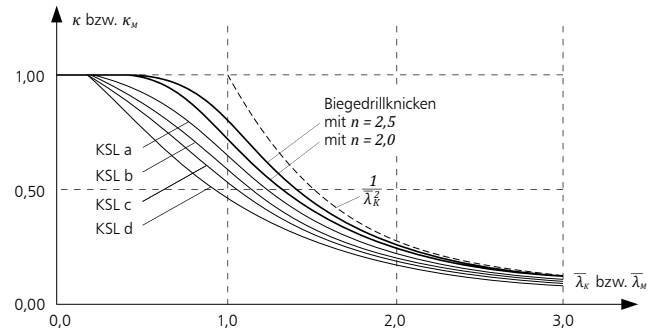


Bild 8. Knickspannungslinien a, b, c und d für das Biegedrillknicken bei Druckstäben nach [5]

## 4 Biegeknicken – Nachweis nach dem vereinfachten Verfahren (Ersatzstabverfahren)

### 4.1 Allgemeines

Das in DIN 18800-2 [1] beschriebene vereinfachte Verfahren beruht auf der Nachweisführung mit dem  $\kappa$ -Verfahren. Dabei wird von einem ideal geraden Stab ausgegangen und der Einfluss der Imperfektionen durch Abminderungsfaktoren  $\kappa$  erfasst. Wie bereits in Kapitel 2.3 erwähnt, sind mit den Abminderungsfaktoren auch die Effekte aus der Vergrößerung der Biegemomente nach Theorie II. Ordnung abgedeckt, so dass in den Nachweisgleichungen die Biegemomente nach Theorie I. Ordnung eingesetzt werden.

### 4.2 Planmäßig zentrischer Druck

Nach Element (304) lautet das Nachweisformat für die maßgebende Ausweichrichtung:

$$\frac{N}{\kappa \cdot N_{pl,d}} \leq 1.0$$

Der Abminderungsfaktor  $\kappa$  ( $= \kappa_y$  bzw.  $\kappa_z$ ) ist in Abhängigkeit von dem bezogenen Schlankheitsgrad  $\bar{\lambda}_K$  und der dem jeweiligen Querschnitt zugeordneten Knickspannungslinie zu ermitteln. Die Knickspannungslinien und damit die Abminderungsfaktoren  $\kappa$  werden durch eine horizontale Gerade bei  $\kappa = 1.0$  und durch eine Linie mit  $\bar{\sigma}_{Ki} = \frac{1}{\bar{\lambda}_K^2}$  begrenzt. Die obere Grenze ergibt sich für eine Druckkraft bei Erreichen der plastischen Normalkraft ( $N = N_{pl,d}$ ). Die zweite Begrenzungslinie wird durch die Eulersche Knickspannung  $\sigma_{Ki} = N_{Ki}/A$  gebildet.

### 4.3 Druck und einachsige Biegung

Nach Element (314) lautet das Nachweisformat für Druck und einachsige Biegung (Parameter gemäß DIN 18800-2 [1]):

$$\frac{N}{\kappa \cdot N_{pl,d}} + \frac{\beta_M \cdot M}{M_{pl,d}} + \Delta n \leq 1.0$$

### 4.4 Druck und zweiachsige Biegung

Für Druck und zweiachsige Biegung werden in DIN 18800-2 [1] zwei Nachweisgleichungen angegeben, die wahlweise angewendet werden dürfen. Die Nachweisverfahren sind in den Elementen (321) und (322) beschrieben. Nachfolgend ist das Nachweisformat zu Element (322) angegeben:

$$\frac{N}{\kappa \cdot N_{pl,d}} + \frac{\beta_{m,y} \cdot M_y}{M_{pl,y,d}} \cdot k_y + \frac{\beta_{m,z} \cdot M_z}{M_{pl,z,d}} \cdot k_z + \Delta n \leq 1.0$$

## 5 Biegedrillknicken – Nachweis nach dem vereinfachten Verfahren

Zusätzlich zu den Verschiebungen treten beim Biegedrillknicken noch Verdrehungen  $\vartheta$  um die Längsachse auf.

### 5.1 Druck und zweiachsige Biegung

Das allgemeine Nachweisformat für Druck und zweiachsige Biegung ist mit Gleichung (30) des Elementes (323) der DIN 18800-2 [1] gegeben. Durch Streichung der nicht vorhandenen Terme kann das Nachweisformat auf den Fall bei einachsiger Beanspruchung angewendet werden.

$$\frac{N}{\kappa_z \cdot N_{pl,d}} + \frac{M_y}{\kappa_M \cdot M_{pl,y,d}} \cdot k_y + \frac{M_z}{M_{pl,z,d}} \cdot k_z \leq 1.0$$

Auch beim Biegedrillknicken erfolgt die Abminderung über den  $\kappa$ -Beiwert ( $\kappa_M$ ) entsprechend Bild 8.

Dr.-Ing. Joachim Kretz  
mb AEC Software GmbH  
mb-news@mbaec.de

## Normen und Literatur

- [1] DIN 18800-2: Stahlbauten – Teil 2: Stabilitätsfälle – Knicken von Stäben und Stabwerken. Ausgabe November 2008.
- [2] Lindner, J.; Scheer, J.; Schmidt, H.: Stahlbauten. Erläuterungen zu DIN 18800 Teil 1 bis 4. 3. Auflage, Beuth Verlag, Berlin 1998.
- [3] Rothert, H.; Gensichen, V.: Nichtlineare Stabstatik. Springer Verlag, Berlin 1987.
- [4] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. 2. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig 1982.
- [5] Kindmann, R.: Stahlbau – Teil 2. Stabilität und Theorie II. Ordnung. 4. Auflage, Ernst & Sohn Verlag, Berlin 2008.
- [6] Lindner, J.; Heyde, S.: Schlanke Stabtragwerke. Stahlbau-Kalender 2009, Ernst & Sohn Verlag, Berlin 2009.
- [7] Kindmann, R.; Kraus, M.: Finite-Element-Methoden im Stahlbau. Ernst & Sohn Verlag, Berlin 2009.
- [8] Wagenknecht G.: Stahlbau-Praxis – Band 1. Tragwerksplanung – Grundlagen. 2. Auflage, Bauwerk Verlag, Berlin 2005.
- [9] Krüger, U.: Stahlbau – Teil 2. Stabilitätslehre, Stahlhochbau und Industriebau. 2. Auflage. Ernst & Sohn Verlag, Berlin 2000.